§6 Der Funktionalkalkül

Sei A eine beliebige C^*-Algebra. Ein Element $a \in A$ heißt <u>normal</u>, falls $aa^* = a^*a$ gilt. Insbesondere ist jedes selbstadjungierte Element $a = a^*$ in A normal.

Ist A unital und $a \in A$ normal, so werden wir zeigen, dass wir für jede stetige Funktion $f : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ ein Element $f(a) \in A$ definieren können, so dass die Abb

$$C(\sigma(a)) \to A \ ; \ f \mapsto f(a)$$

ein isometr. $*$-Homom. ist. Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ durch eine Potenzreihe gegeben die auf $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$ glm. konvergent ist, so gilt auch

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (a - z_0 1)^n \quad \text{in } A.$$

Ist A ohne 1, so erhalten wir ein ähnliches Resultat für alle Fkt. $f \in C(\sigma(a))$ mit $f(0) = 0$.

<u>Wichtiger Spezialfall</u>: $A = B(H)$ mit H komplexer Hilbertraum, $T \in B(H)$ normal.

<u>6.1 Bez + Bem.</u> (1) Sei A eine C^*-Algebra und sei $S \subseteq A$. Dann heißt

$$C^*(S) = \bigcap \{ B \mid B \ C^*\text{-Unteralg. von } A,\ S \subseteq B \}$$

die von S erzeugte C^*-Unteralgebra von A.

Es gilt immer

$$C^*(S) = C^*(S \cup S^*) = \overline{LH\{ a_1 \cdots a_m \mid m \in \mathbb{N},\ a_1, \dots, a_m \in S \cup S^* \}}$$

Daraus folgt: $C^*(S)$ ist kommutativ g.d.w. gilt: $\forall a, b \in S \cup S^*$ gilt $ab = ba$

(2) Ist $S = \{a\}$ für ein $a \in A$, so schreiben wir $C^*(a)$ anstelle von $C^*(\{a\})$, bzw. $C^*(a,1) := C^*(\{a,1\})$ wenn A unital.
Ist a normal, so sind $C^*(a)$ (bzw. $C^*(a,1)$, falls A unital) kommutative C^*-Unteralg. von A. Es gilt dann

$$C^*(a) = \overline{\left\{ \sum_{\substack{k,m=0 \\ k+m\geq 0}}^{N} \alpha_{k,m} a^k (a^*)^m \mid N \in \mathbb{N}, \alpha_{k,m} \in \mathbb{C} \right\}}$$

und

$$C^*(a,1) = \overline{\left\{ \sum_{k,m=0}^{N} \alpha_{k,m} a^k (a^*)^m \mid N \in \mathbb{N}, \alpha_{k,m} \in \mathbb{C} \right\}}$$

wobei wir $a^0 = (a^*)^0 = 1$ setzen.

<u>6.2 Satz</u> (Funktionalkalkül für unitale C^*-Algebren)
Sei A eine unitale C^*-Algebra und sei $a \in A$ <u>normal</u>. Dann ex. genau ein unitaler $*$-Homom.

$$\Phi : C(\sigma(a)) \to A \quad \text{mit} \quad \Phi(\mathrm{id}_{\sigma(a)}) = a,$$

und dann gelten
(1) $\Phi(C(\sigma(a))) = C^*(a,1)$, und
(2) $\Phi : C(\sigma(a)) \to C^*(a,1)$ ist ein isometr. $*$-Isomorphismus.

<u>Beweis</u>: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit.
Zunächst gilt nach 5.8, dass Φ automatisch stetig mit $\|\Phi\|_{op} \leq 1$ ist.
Betr. nun $P_a := \{p : \sigma(a) \to \mathbb{C} \mid p \text{ Polynom in } z \text{ und } \bar{z}\}$
(also $p(z) \overset{(*)}{=} \sum_{k,m=0}^{N} \alpha_{k,m} z^k \bar{z}^m$ mit $N \in \mathbb{N}, \alpha_{k,m} \in \mathbb{C}$).
Dann ist P_a eine Unteralg. von $C(\sigma(a))$ mit $1 \in P_a$.
P_a trennt die Punkte von $\sigma(a)$ (da $\mathrm{id}_{\sigma(a)} \in P_a$)
und $\overline{P_a} = P_a$. Nach Stone-Weierstraß folgt,

dass P_a dicht ist in $C(\sigma(a))$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
Schreiben wir z für $id_{\sigma(a)}: z \mapsto z$, so folgt wegen $\phi(id_{\sigma(a)}) = a$ und $\phi(1) = 1$, dass für p mit $p(z) = \sum_{k,m=0}^{N} \alpha_{k,m} z^k \bar{z}^m$ gilt: $p = \sum_{k,m=0}^{N} \alpha_{k,m} id^k \overline{id}^m$ und dann (da ϕ $*$-Homom.)

$$\phi(p) = \sum_{k,m=0}^{N} \alpha_{k,m} a^k (a^*)^m$$

Damit ist ϕ durch die Bed. $\phi(id) = a$ auf der dichten Unteralg. $P_a \subseteq C(\sigma(a))$ eindeutig festgelegt. Da ϕ stetig, ist ϕ dann auch auf $C(\sigma(a))$ eindeutig festgelegt! Da $\phi(P_a) \subseteq C^*(a,1)$ und $\overline{P_a} = C(\sigma(a))$ gilt dann auch

$$\phi(C(\sigma(a))) = \phi(\overline{P_a}) \subseteq \overline{\phi(P_a)} \subseteq C^*(a,1).$$

Wir beweisen nun die Existenz von ϕ.
Nach dem Satz von Gelfand-Naimark gilt für $B := C^*(a,1)$, dass $B \cong C(\hat{B})$ vermöge $b \mapsto \hat{b}$ mit $\hat{b}(\chi) = \chi(b)$ für $\chi \in \hat{B}$. Nach 4.13 (3) gilt: $\hat{b}(\hat{B}) = \sigma_B(b)$ für alle $b \in B$. Insbesondere folgt $\hat{a}(\hat{B}) = \sigma_B(a)$. (= Spektrum von a als Elem. von B).

<u>Beh:</u> Es gilt: $\hat{a}: \hat{B} \to \sigma_B(a)$ ist ein Homöom.
Da $\hat{a}$ stetig und $\hat{B}$ und $\sigma_B(a)$ kompakte T_2-Räume sind, genügt es zu zeigen, dass $\hat{a}: \hat{B} \to \sigma_B(a)$ injektiv ist (und dann auch bijektiv!).
Sind aber $\chi_1, \chi_2 \in \hat{B}$ mit $\hat{a}(\chi_1) = \hat{a}(\chi_2)$, so folgt $\chi_1(a) = \chi_2(a)$, und dann auch (mit 5.12)

$$\chi_1(a^*) = \overline{\chi_1(a)} = \overline{\chi_2(a)} = \chi_2(a^*).$$ Dann folgt

auch

$$\chi_1\Big(\sum_{k,m}\alpha_{k,m}\, a^k (a^*)^m\Big) = \sum_{k,m}\alpha_{k,m}\, \chi_1(a)^k\, \overline{\chi_1(a)}^{\,m}$$
$$= \sum_{k,m}\alpha_{k,m}\, \chi_2(a)^k\, \overline{\chi_2(a)}^{\,m} = \chi_2\Big(\sum_{k,m}\alpha_{k,m}\, a^k (a^*)^m\Big)$$

für jedes "Polynom" in a und a^*. Da diese nach Bem 6.1 dicht in $B = C^*(a,1)$ liegen, und da χ_1, χ_2 stetig sind, folgt $\chi_1 = \chi_2$ auf B.

Wir erhalten nun einen isometrischen $*$-Isom.

$$\varphi_a : C(\sigma_B(a)) \longrightarrow C(\hat{B}) \; ; \; \varphi_a(f) = f \circ \hat{a}.$$

Sei $\wedge : B \to C(\hat{B})$ der Gelfand-Homom. für B, der nach 5.13 ein isometr. $*$-Isomorph. ist.
Setze $\psi := \wedge^{-1} : C(\hat{B}) \to B$ und

$$\phi := \psi \circ \varphi_a : C(\sigma_B(a)) \longrightarrow B$$

Dann ist auch ϕ ein isometr. $*$-Isomorphismus, und da ψ und φ_a unital sind, ist auch ϕ unital. Ferner gilt wegen

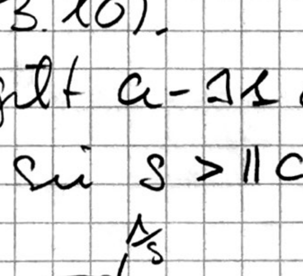
$$\varphi_a(f) = f \circ \hat{a}, \text{ dass } \varphi_a(id) = id \circ \hat{a} = \hat{a}$$

und da $\psi = \wedge^{-1}$ gilt $\psi(\hat{a}) = a$, also folgt

$$\phi(id) = \psi(\varphi_a(id)) \overset{s.o.}{=} \psi(\hat{a}) = a.$$

Für den Beweis des Satzes müssen wir noch zeigen, dass $\sigma_B(a) = \sigma(a)$ $(= \sigma_A(a))$ gilt.
Da $B \subseteq A$ gilt $\sigma(a) \subseteq \sigma_B(a)$ (3.10).
<u>Ann</u>: $\exists\, \lambda \in \sigma_B(a) \setminus \sigma(a)$. Dann gilt $a - \lambda 1 \in G(A)$.
Setze $c := (a - \lambda 1)^{-1} \in A$ und sei $s > \|c\|$.
Definiere $f : \sigma_B(a) \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \begin{cases} s, & |z-\lambda| \le \frac{1}{s} \\ \frac{1}{|z-\lambda|}, & |z-\lambda| \ge \frac{1}{s} \end{cases}$$



Dann ist f wohldef + stetig, denn $|z-\lambda| = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{|z-\lambda|} = s$.

Ferner gilt $f(\lambda) = S$, also $\|f\|_{\sigma_B(a)} = \sup_{z \in \sigma_B(a)} |f(z)| \geq S$.

Setze
$$g = (z-\lambda) f(z).$$

Dann ist g stetig mit $\|g\|_{\sigma_B(a)} \leq 1$. Ist dann $\phi : C(\sigma_B(a)) \to B$ wie oben, so folgt für $c = (a-\lambda 1)^{-1}$:

$$\|c\| \overset{\text{Wahl von } S}{<} S = f(\lambda) \leq \|f\|_{\sigma_B(a)} = \|\phi(f)\| = \|c \underbrace{(a-\lambda 1)\phi(f)}_{=\phi(g)}\|$$
$$= \|c\,\phi(g)\| \leq \|c\| \|\phi(g)\| \leq \|c\| \underbrace{\|g\|_{\sigma_B(a)}}_{\leq 1} \leq \|c\|,$$

also $\|c\| < \|c\|$ und wir erhalten einen Widerspruch! Es folgt $\sigma_B(a) = \sigma_A(a)$ und der Satz ist bewiesen! ∎

Aus dem Beweis des Satzes erhalten wir noch.

6.3 Folgerung: Seien A eine C^*-Algebra, $C \subseteq A$ eine C^*-Unteralgebra und $a \in C$ normal. Dann gilt
$$\sigma_C(a) \cup \{0\} = \sigma_A(a) \cup \{0\}.$$
Ist A unital, und ist $1_A \in C$, so gilt auch
$$\sigma_C(a) = \sigma_A(a).$$

Bew: Ist A unital mit $1_A \in C$, so gilt nach dem letzten Teil des Beweises für $B = C^*(a,1)$:
$$\sigma_C(a) = \sigma_B(a) = \sigma_A(a).$$
Im allgemeinen Fall betrachte die offensichtliche Einbettung $C^1 = C + \mathbb{C}1 \hookrightarrow A + \mathbb{C}1 = A^1$ und die Gleichung
$$\sigma_C(a) \cup \{0\} = \sigma_{C^1}(a) \overset{\text{s.o.}}{=} \sigma_{A^1}(a) = \sigma_A(a) \cup \{0\}.$$ ∎

6.4 Bez + Bemerkung Ist $\phi : C(\sigma(a)) \to A$ wie in Satz 6.2, so schreibt man sehr oft

einfach $\quad f(a) := \Phi(f)$,
dh. wir fassen $\Phi(f)$ als Einsetzung von a in f auf. Ist f ein Polynom in z und $\bar{z}$, so stimmt dies mit der kanonischen Einsetzung

$$f(a) = \sum_{k,m} \alpha_{k,m} a^k (a^*)^m \quad \left(f(z) = \sum_{k,m} \alpha_{k,m} z^k \bar{z}^m \right)$$

überein. Wir werden später noch die Eigenschaften der Abb. $f \mapsto f(a)$ genauer untersuchen.
Zunächst wollen wir jedoch eine Version für C^* Algebren ohne 1 beweisen. In diesem Fall gilt immer $0 \in \sigma(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a)$ und wir setzen dann

$$C_0(\sigma(a)) := \{ f \in C(\sigma(a)) \mid f(0) = 0 \}.$$

Ist A unital und $0 \notin \sigma(a)$, so setze $C_0(\sigma(a)) := C(\sigma(a))$.

<u>6.7 Satz</u> Sei A eine C^* Algebra. Dann ex. genau ein $*$-Homom.

$$\Phi : C_0(\sigma(a)) \to A \quad \text{mit } \Phi(\mathrm{id}_{\sigma(a)}) = a.$$

Es gilt dann $\Phi(C_0(\sigma(a))) \subseteq C^*(a)$ und

$$\Phi : C_0(\sigma(a)) \to C^*(a)$$

ist ein isometr. $*$-Isomorphismus.
<u>Bew:</u> <u>Bez.</u> $P_a := \{ \sum_{k,m}^{N} \alpha_{k,m} z^k \bar{z}^m \mid \ldots \}$ wie im Beweis von 6.2 und setze $P_{a,0} = \{ p \in P_a \mid a_{00} = 0 \}$
Dann ist $P_{a,0}$ eine $*$-Unteralgebra von $C_0(\sigma(a))$ die streng die Punkte von $\sigma(a) \setminus \{0\}$ trennt
[da $\mathrm{id}_{\sigma(a)} \in P_{a,0}$ und sind $z_1, z_2 \in \sigma(a) \setminus \{0\}$, so gilt $0 \neq \mathrm{id}(z_1) \neq \mathrm{id}(z_2) \neq 0$.]

Mit Stone-Weierstraß angewendet auf den lokalkompakten Raum $\sigma(a)\setminus\{0\}$ folgt, dass $P_{a,0}$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ dicht liegt in $C_0(\sigma(a))$.

Ist dann $\phi: C_0(\sigma(a)) \to A$ ein bel. $*$-Homom. mit $\phi(\mathrm{id}_{\sigma(a)}) = a$, so folgt wie im Beweis von 6.2., dass $\phi(p) = \sum_{k,m} \alpha_{k,m} a^k \bar{a}^m$ für $p \in P_{a,0}$ mit $p(z) = \sum_{k,m} \alpha_{k,m} z^k \bar{z}^m$.

Da ϕ nach 5.8 automatisch stetig ist, ist ϕ damit durch $\phi(\mathrm{id}) = a$ eindeutig festgelegt auf $C_0(\sigma(a)) = \overline{P_{a,0}}$. Es folgt dann

$$(*)\left\{\begin{aligned}\overline{\phi(C_0(\sigma(a)))} &= \overline{\phi(P_{a,0})} = \overline{\left\{\sum_{\substack{k,m \\ k+m>0}}^{N} \alpha_{k,m} a^k (a^*)^m \,\middle|\, N\in\mathbb{N}, \alpha_{k,m}\in\mathbb{C}\right\}} \\ &= C^*(a).\end{aligned}\right.$$

<u>Existenz</u>: Ist A unital und ist $\phi: C(\sigma(a)) \to A$ wie in 6.2, so ist $\phi_0 := \phi|_{C_0(\sigma(a))}$ wie im Satz. Da ϕ isometrisch ist auch ϕ_0 isometrisch, und mit $(*)$ folgt dann $\phi_0(C_0(\sigma(a))) = C^*(a) \subseteq A$ (da wenn ϕ isometrisch, dann Bild von $C_0(\sigma(a))$ in A abgeschlossen, da vollständig, ist).
Ist A ohne $\mathbb{1}$, so sei $\phi: C_0(\sigma(a)) \to A^1$ wie im Satz. Dann folgt $\phi(C_0(\sigma(a))) = C^*(a) \subseteq A$ wir sind fertig. ■

Wir haben nun einen Funktionalkalkül für alle C^*-Algebren A: Ist A unital, $f \in C(\sigma(a))$ so setzen wir $f(a) := \phi(f)$, wobei $\phi: C(\sigma(a)) \to C^*(a,1)$ wie in Satz 6.2. Ist A ohne $\mathbb{1}$, $f \in C_0(\sigma(a))$,

So setze $f(a) := \phi(f)$
mit $\phi: C_0(\sigma(a)) \xrightarrow{\cong} C^*(a) \subseteq A$ wie in 6.5.

Die folgenden Resultate wollen wir nur für für den unitalen Fall formulieren. Durch Übergang auf A^1 erhalten wir entsprechende allgemeine Resultate:

<u>6.6</u> <u>Lemma</u> Seien A, B unitale C^*-Algebren und sei $\psi: A \to B$ ein unitaler $*$-Homom. Dann gilt für alle $a \in A$ normal:
$$\psi(f(a)) = f(\psi(a)).$$

<u>Bew:</u> Nach 3.10 gilt $\sigma_B(\psi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$, also ist f auch stetig auf $\sigma_B(\psi(a))$ und die Formel macht Sinn!

Betr. nun die folgenden Kompositionen von $*$-Homomorphismen:
$$\varphi : C(\sigma_A(a)) \xrightarrow{\phi_a} A \xrightarrow{\psi} B$$
$$\tilde{\varphi} : C(\sigma_A(a)) \xrightarrow{Rs} C(\sigma_B(\psi(a))) \xrightarrow{\phi_{\psi(a)}} B$$

wobei ϕ_a bzw $\phi_{\psi(a)}$ die $*$-Homom. aus 6.2. für a bzw $\psi(a)$ sind, und $Rs(f) = f|_{\sigma_B(\psi(a))}$ für $f \in C(\sigma_A(a))$. Dann sind
$$\varphi, \tilde{\varphi} : C(\sigma_A(a)) \to B \quad *\text{-Homom. mit}$$
$\varphi(1) = \tilde{\varphi}(1) = 1$, $\varphi(id) = \tilde{\varphi}(id) = \psi(a)$.

Dann folgt wie im Bew. von 6.2, dass $\varphi = \tilde{\varphi}$ auf $P_a = \{\sum_{k,m} \alpha_{k,m} z^k \bar{z}^m \mid \cdots\}$ und da $\overline{P_a} = C(\sigma_A(a))$ und $\varphi, \tilde{\varphi}$ stetig nach 5.8, folgt $\varphi = \tilde{\varphi}$.
Insb. folgt $\forall f \in C(\sigma(a)) : f(\psi(a)) = \tilde{\varphi}(f) = \varphi(f) = \psi(f(a))$ ∎

Bem: Ist $\varphi: A \to B$ ein nicht unitaler $*$-Homom., so erhält man einen unitalen C^*-Homom.

$$\varphi^1: A^1 \to B^1 \;;\; \varphi^1(a+\lambda 1) = \varphi(a) + \lambda 1.$$

Wenden wir dann 6.6 auf φ^1 und $f \in C_0(\sigma(a))$ an, so erhalten wir die Formel

$$\varphi(f(a)) = f(\varphi(a)) \quad \forall f \in C_0(\sigma(a)).$$

6.7 Lemma Sei A eine unitale C^*-Algebra und sei $a \in A$ normal. Dann gilt für alle $f \in C(\sigma(a))$: $f(a)$ ist normal, $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ und für alle $g \in C(\sigma(f(a)))$ gilt $g(f(a)) = g \circ f\,(a)$.

Beweis: Da $f(a) \in C^*(a,1)$ und $C^*(a,1)$ kommutativ, folgt auch $f(a)^* f(a) = f(a) f(a)^*$, also $f(a)$ normal.

Ferner gilt wegen $C(\sigma(a)) \cong C^*(a,1) =: B$, dass

$$\sigma_A(f(a)) \overset{6.3}{=} \sigma_B(f(a)) = \sigma_{C(\sigma(a))}(f) = f(\sigma(a)),$$

wobei die letzte Gleichung aus 3.3 folgt.

Wir betrachten nun den $*$-Homom.

$$\phi: C(\sigma(f(a))) \to A \;;\; \phi(g) = g \circ f\,(a)$$

(die Komposition des $*$-Homom $C(\sigma(f(a))) \to C(\sigma(a))$ $g \mapsto g \circ f$ mit dem Funktionalkalkül für a).

Es gilt dann $\phi(1) = 1$ und $\phi(id) = (id \circ f)(a) = f(a)$. Nach der Eindeutigkeitsaussage in 6.2 folgt dann, dass ϕ der Funktionalkalkül für $f(a)$ ist, d.h. $g \circ f(a) = \phi(g) = g(f(a))$ $\forall g \in C(\sigma(f(a)))$. $\boxtimes$

Eine weitere Konsequenz aus 6.2 ist:

6.8 Folgerung: Sei A eine C^*-Algebra und sei $a \in A$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$\sigma(a) \subseteq [-\|a\|, \|a\|] \subseteq \mathbb{R}$$

und mindestens eine der Grenzen $\pm\|a\|$ liegt in $\sigma(a)$.

<u>Beweis</u>: Sei o.B.d.A. A unital (sonst Übergang auf A^1). Da $a=a^*$ ist a normal, und da $C(\sigma(a)) \to A$, $f \mapsto f(a)$ isometrisch (also injektiver) $*$-Homom. mit

$$id(a) = a = a^* = \overline{id}(a)$$

gilt $id = \overline{id}$ auf $\sigma(a)$, also $z = \overline{z}$ $\forall z \in \sigma(a)$. Also folgt $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Da $\sigma(a) \subseteq B_{\|a\|}(0)$ folgt dann auch $\sigma(a) \subseteq [-\|a\|, \|a\|]$.

Da $a=a^*$ folgt mit 5.6, dass

$$\|a\| = \rho(a) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}$$

und damit folgt nun $\|a\| \in \sigma(a)$ oder $-\|a\| \in \sigma(a)$. ■

<u>6.9 Folgerung</u>: Seien A, B C^*-Algebren und sei $\varphi: A \to B$ ein <u>injektiver</u> $*$-Homomorphismus. Dann ist φ automatisch isometrisch, also

$$\|\varphi(a)\| = \|a\| \quad \forall a \in A.$$

<u>Bew</u>: Nach 5.9 gilt $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ $\forall a \in A$.

<u>Ann</u>: $\exists a \in A$ mit $\|\varphi(a)\| < \|a\|$. Sei o.B.d.A $\|a\| = 1$. Setze $c = a^*a$. Dann ist c selbstadj. mit

$$\|c\| = \|a\|^2 = 1 \quad \text{und}$$

$$\alpha := \|\varphi(c)\| = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| \overset{C^*\text{-Bed}}{=} \|\varphi(a)\|^2 < \|a\|^2 = \|c\| = 1$$

Da c und $\varphi(c)$ selbstadj. gilt $\sigma(\varphi(c)) \subseteq [-\alpha, \alpha]$ und $\sigma(c) \subseteq [-1,1]$ mit 1 oder -1 in $\sigma(c)$.

<u>Def</u>: $f: [-1,1] \to \mathbb{C}$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leq \alpha \\ \frac{|t|-\alpha}{1-\alpha}, & |t| \geq \alpha \end{cases}$$

<u>Skizze</u>:

Dann gilt $f(c) \neq 0$, denn $f(1) = f(-1) = 1 \neq 0$, $\|f_{|\sigma(c)}\|_\infty = 1$ und dann $\|f(c)\| = \|f_{|\sigma(c)}\|_\infty = 1$.

Wenn $f_{|[-\alpha,\alpha]} \equiv 0$ gilt also $f_{|\sigma(\varphi(c))} \equiv 0$, und dann folgt $0 = f(\varphi(c)) \overset{6.6}{=} \varphi(f(c)) \neq 0$, da $f(c) \neq 0$ und φ injektiv. Widerspruch?